EX 13 :

1. *La fonction tg est dérivable et ne s'annule pas sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ d'où la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{tg(x)}$ est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

*

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1}{(x-\frac{\pi}{2}).tg(x)}$$

$$= \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{\cot g(x)}{x-\frac{\pi}{2}} = (\cot g)'(\frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{-1}{\sin^2(\frac{\pi}{2})} = -1 = f_g'(\frac{\pi}{2})$$

Donc f est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$

Conclusion : f est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

2.

$*-2 \le f_g'(\frac{\pi}{2}) = -1 \le -1$

$*$ *pour* $x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ $\quad f'(x) = \frac{-(1+tg^2(x))}{tg^2(x)}$

$$f'(x) = -(1+\frac{1}{tg^2(x)})$$

pour $x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ $\quad tg(x) \ge 1 \Rightarrow tg^2(x) \ge 1$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{1}{tg^2(x)} \le 1 \Rightarrow 1 \le 1+\frac{1}{tg^2(x)} \le 2$$

$$\Rightarrow -2 \le -(1+\frac{1}{tg^2(x)}) \le -1$$

$$\Rightarrow -2 \le f'(x) \le -1$$

Conclusion :

$$-2 \le f'(x) \le -1 \quad \textit{pour tout } x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$$

3. $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ *f est dérivable sur* $\left[\frac{\pi}{4},x\right]$ et $-2 \le f'(t) \le -1 \quad \forall t \in \left[\frac{\pi}{4},x\right]$

Alors d'après th des acc finis :

$$-2(x-\frac{\pi}{4}) \le f(x)-f(\frac{\pi}{4}) \le -(x-\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}-2x \le \frac{1-tg(x)}{tg(x)} \le \frac{\pi}{4}-x$$

EX 14 :

1. a/ $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et h(x)=tg(x)

h est dérivable sur[0,x] et $h'(x)=1+tg^2x \ge 1$ d'où

$h(x)-h(0) \ge 1.(x-0) \Rightarrow tg(x) \ge x$

b/ $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$; $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x) = \frac{x.\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$$

$$= \frac{\cos(x)}{x^2}(x-tg(x)) \le 0 \; car \; x \le tg\,x \; et \; \cos x \ge$$

d'où f est décroissante sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

2. a/ h(t)=tg(t) , $h'(t)=\frac{1}{\cos^2(t)}$

pour $t \in [x,y]$ $\cos y \le \cos t \le \cos x$ car la fonction cos est décroissante sur $[0,\frac{\pi}{2}[$

$\Rightarrow \cos^2 y \le \cos^2 t \le \cos^2 x$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \le h'(t) \le \frac{1}{\cos^2 y}$ Alors d'après le th.Inega.Acc.Finis :

$$\frac{1}{\cos^2 x}(y-x) \le h(y)-h(x) \le \frac{1}{\cos^2 y}(y-x)$$

$$\Rightarrow \frac{y-x}{\cos^2 x} \le tg(y)-tg(x) \le \frac{y-x}{\cos^2 y}$$

Qarray.tn -Aqra Blech Qarray.tn